Netzwerklüsse mit Halbringen und Fuzzyrelationen

Roland Glück

Universität Augsburg

10. Oktober 2007

Gliederung

- Fuzzyrelationen
- Halbringe
- Netzwerke

Ab- und Übersicht

- Neue Beschreibung von Netzwerkflüssen
- Algebraischer Zugang
- Formalisierung $\Rightarrow$ automatisches/interaktives Beweisen

Definition (Fuzzyrelationen)

- Eine *Fuzzyrelation* $\alpha : X \rightharpoondown Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Abbildung von $X \times Y$ in das Intervall $[0,1]$
- Traditionelle Relationen sind in natürlicher Weise in Fuzzyrelationen eingebettet
- Eine Fuzzyrelation $\alpha : X \rightharpoondown X$ heißt auch *Fuzzyendorelation* auf X
- Korrespondenz Fuzzyendorelation $\Leftrightarrow$ gewichteter Graph
- Eine *boolesche* Fuzzyrelation nimmt nur Werte aus $\{0,1\}$ an
- *Allrelation* ∇_{XY} und *leere Relation* 0_{XY} sind gegeben durch $\nabla_{XY}(x,y) = 1$ bzw. $0_{XY}(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in X \times Y$
- *Identitätsrelation* id_{XX} hat die Charakterisierung $id_{XX}(x,y) = \delta_{xy}$

Operationen auf $[0,1]$

Für Zahlen $a, b \in [0,1]$ definieren wir:

- $a \vee b = max(a,b)$
- $a \wedge b = min(a,b)$
- $a \ominus b = max(0, a-b)$
- $a \oplus b = min(1, a+b)$
- $a^\bullet = \lceil a \rceil$

Operationen auf Fuzzyrelationen

Seien α und β Fuzzyrelationen von X nach Y. Dann definieren wir:

- Vereinigung: $(\alpha \sqcup \beta)(x,y) = \alpha(x,y) \vee \beta(x,y)$
- Schnitt: $(\alpha \sqcap \beta)(x,y) = \alpha(x,y) \wedge \beta(x,y)$
- Differenz: $(\alpha \ominus \beta)(x,y) = \alpha(x,y) \ominus \beta(x,y)$
- Summe: $(\alpha \oplus \beta)(x,y) = \alpha(x,y) \oplus \beta(x,y)$
- Existenz: $\alpha^{\bullet}(x,y) = \lceil \alpha(x,y) \rceil$
- Konversenbildung: $\alpha^{\sharp}(x,y) = \alpha(y,x)$
- Ordnung: $\alpha \sqsubseteq \beta \Leftrightarrow \alpha(x,y) \leq \beta(x,y)$ für alle $(x,y) \in X \times Y$

Komposition von Fuzzyrelationen

Für zwei Fuzzyrelationen $\alpha : X \rightharpoondown Y$ und $\beta : Y \rightharpoondown Z$ ist die *Komposition* $\alpha\beta : X \rightharpoondown Z$ definiert mittels

$$\alpha\beta(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \alpha(x,y) \wedge \beta(y,z)$$

Offensichtlich gilt $id_{XX}\alpha = \alpha = \alpha id_{YY}$, $0_{ZX}\alpha = 0_{ZY}$ und $\alpha 0_{YZ} = 0_{XZ}$.

Für eine Fuzzyendorelation $\alpha : X \rightharpoondown X$ sind die *Potenzen* α^n für $n \in \mathbb{N}_0$ induktiv definiert mittels $\alpha^0 = id_{XX}$ und $\alpha^{n+1} = \alpha^n\alpha$

Für ebensolches $\alpha : X \rightharpoondown X$ ist $\alpha^* : X \rightharpoondown X$ definiert als $\alpha^* := \bigsqcup_{n \geq 0} \alpha^n = \bigsqcup_{0 \leq n < |X|} \alpha^n$

Kardinalität von Fuzzyrelationen

Die *Kardinalität* $|\alpha|$ einer Fuzzyrelation $\alpha : X \rightharpoondown Y$ ist definiert durch

$$|\alpha| = \Sigma_{x \in X, y \in Y} \alpha(x, y)$$

Eigenschaften der Kardinalität:

- $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0_{XY}$
- $\alpha \sqcap \beta = 0_{XY} \Rightarrow |\alpha \sqcup \beta| = |\alpha| + |\beta|$
- $\alpha \sqsubseteq \beta \Rightarrow |\alpha| \leq |\beta|$
- $|\alpha| = |\alpha^\sharp|$

Definition (Halbring)

Ein *Halbring* ist ein Quintupel $(M, +, \cdot, 0, 1)$, so daß

- $(M, +, 0)$ ein kommutatives Monoid ist,
- $(M, \cdot, 1)$ ein Monoid ist,
- 0 ein Annihilator bzg. $\cdot$ ist, d.h., $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in M$ gilt,
- $\cdot$ sowohl links- als auch rechtsdistributiv über $+$ ist.

0 ist die *Null*, 1 die *Eins*.

$+$ heißt Addition, $\cdot$ Multiplikation.

Gilt $x + x = x$, so heißt der Halbring auch *idempotent*.

Auf idempotenten Halbringen ist eine Ordnung $\sqsubseteq$ definiert durch $x \sqsubseteq y :\Leftrightarrow x + y = y$

Tests in Halbringen

Ein *Test* in einem Halbring ist ein Element p mit

- $p \sqsubseteq 1$
- Es existiert ein Element $\neg p$, das Komplement von p, mit $p + \neg p = 1$ und $p \cdot \neg p = 0 = \neg p \cdot p$

Eigenschaften von Tests:

- $\neg p$ ist ebenfalls ein Test und eindeutig bestimmt
- $p \cdot q = q \cdot p$ für Tests p, q
- $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$
- $p + (q \cdot r) = (p + q) \cdot (p + r)$
- $\neg(\neg p) = p$
- $\neg(p + q) = \neg p \cdot \neg q$
- $\neg(p \cdot q) = \neg p + \neg q$

Fuzzyrelationen und Halbringe

- Fuzzyrelationen von X nach X bilden einen idempotenten Halbring mit $\sqcup$ als Addition, $\cdot$ als Multiplikation, 0_{XX} als Null und id_{XX} als Eins.
- $\sqsubseteq$ entspricht der durch $\sqcup$ induzierten Ordnung
- Tests τ in diesem Halbring sind boolesche Fuzzyrelationen mit $\tau \sqsubseteq id_{XX}$
- Diese Tests eignen sich zum Charakterisieren von Teilmengen von X
- Schreibweise $\tau(S)$ für einen zu einer Teilmenge $S \subseteq X$ gehörigen Test
- τ^c als bequemere Schreibweise für $\neg\tau$

Definition (Netzwerke und Pseudonetzwerke)

Ein *Netzwerk* ist ein Tripel $N = (\alpha : X \rightharpoondown X, s, t)$, wobei X eine nichtleere Menge ist, s, die Quelle, und t, die Senke, zwei verschiedene Elemente von X sind und α eine Fuzzyendorelation auf X ist mit $\alpha \sqcap \alpha^\sharp = 0_{XX}$.

Falls $\alpha \sqcap \alpha^\sharp = 0_{XX}$ nicht gefordert ist, so heißt N ein *Pseudonetzwerk*.

Ein Tupel $(x, y) \in X \times Y$ mit $\alpha(x, y) > 0$ heißt auch *Kante* von N.

$\alpha(x, y)$ ist die *Kapazität* der Kante (x, y).

Flüsse in Pseudonetzwerken

Ein *Fluß* φ auf einem Pseudonetzetzwerk $N = (\alpha : X \rightharpoonup X, s, t)$ ist eine Fuzzyendorelation auf X mit

- $\varphi \sqsubseteq \alpha$
- $|\tau\varphi| = |\varphi\tau|$ für alle Testrelationen τ mit $\tau \sqsubseteq \tau(X \backslash \{s, t\})$

Die erste Forderung ist die *Kapazitätsbeschränkung*, die zweite die *Flußerhaltung*.

Wert von Flüssen

Der *Wert* $val(\varphi)$ eines Flusses φ ist definiert als $val(\varphi) = |\tau(s)\varphi| - |\varphi\tau(s)|$.
Es gilt $val(\varphi) = |\varphi\tau(t)| - |\tau(t)\varphi|$ (was aus s rauskommt, muß in t rein).

Beweisskizze:

Sei $\tau_0 = \tau(X \backslash \{s, t\})$. Dann gilt

$|\varphi| =$
$|id_X\varphi| =$
$|(\tau(s) \sqcup \tau(t) \sqcup \tau_0)\varphi| =$
$|\tau(s)\varphi| + |\tau(t)\varphi| + |\tau_0\varphi|$

Analog gilt $|\varphi^\sharp| = |\tau(s)\varphi^\sharp| + |\tau(t)\varphi^\sharp| + |\tau_0\varphi^\sharp| = |\varphi\tau(s)| + |\varphi\tau(t)| + |\varphi\tau_0| =$
$|\varphi|$. Aus $|\varphi\tau_0| = |\tau_0\varphi|$ folgt die Behauptung.

Definition (Maximalität, Schnitt und Residualnetzwerk)

- Ein Fluß φ in einem Pseudonetzwerk N heißt *maximal*, falls $val(\varphi) \geq val(\psi)$ für alle Flüsse ψ auf N gilt.
- Ein *Schnitt* τ auf einem Pseudonetzwerk ist eine Testrelation auf X mit $\tau(s) \sqsubseteq \tau \sqsubseteq \tau(t)^c$
- Die *Kapazität* $c_N(\tau)$ eines Schnittes τ auf N ist gegeben durch $c(\tau) = |\tau\alpha\tau^c|$
- Ein Schnitt τ heißt *minimal*, falls $c_N(\tau) \leq c_N(\sigma)$ für alle Schnitte σ gilt.
- Für ein Netzwerk $N = (\alpha : X \rightharpoondown X, s, t)$ und einen Fluß φ auf N ist das Residualnetzwerk definiert als ein Pseudonetzwerk $N_\varphi = (\varphi_\alpha : X \rightharpoondown X, s, t)$ mit $\varphi_\alpha = (\alpha \ominus \varphi) \sqcup \varphi^\sharp$.
- Es gilt die Gleichheit $val(\varphi) = |\tau\alpha\tau^c| - |\tau\varphi_\alpha\tau^c| = c_N(\tau) - c_{N_\varphi}(\tau)$

In Richtung Maximalität

Ziel ist, einen Fluß maximalen Wertes zu konstruieren. Dazu:

Sei $N = (\alpha : X \rightharpoondown X, s, t)$ ein Netzwerk und φ ein Fluß auf N. Falls ξ ein Fluß auf N_φ ist, dann ist

$$\psi = (\varphi \ominus (\alpha \sqcap \xi^\sharp)) \oplus (\alpha \sqcap \xi)$$

ein Fluß auf N mit dem Wert $val(\psi) = val(\varphi) + val(\xi)$

Beweis: Nicht schwierig, aber technisch und langwierig.

Sprechweise: *Augmentierung* von φ um ξ

Max-Flow Min-Cut Theorem

Sei $N = (\alpha : X \rightharpoonup X, s, t)$ ein Netzwerk und φ ein Fluß auf N. Dann sind äquivalent:

(a) φ ist maximal

(b) $s\varphi^* t = 0_{XX}$

(c) Es gibt einen Schnitt τ mit $c(\tau) = val(\varphi)$

m.a.W., der Wert eines maximalen Flusses entsprich der Kapazität eines minimalen Schnittes.

Beweisskizze

- (a) $\Rightarrow$ (b):
  Angenommen, φ ist maximal und (b) ist nicht erfüllt. Dann kann man aber im Residualnetzwerk noch augmentieren, ein Widerspruch.
- (b) $\Rightarrow$ (c):
  Betrachte alle im Residualnetzwerk von s aus erreichbaren Knoten. Diese bilden einen Schnitt mit der gewünschten Eigenschaft.
- (c) $\Rightarrow$ (a):
  Wir wissen bereits, daß die Kapazität eines beliebigen Schnittes größergleich dem Wert jedes Flusses ist. Im Fall der Gleichheit bleibt also nichts anderes als die Behauptung übrig.

Alle diese Beweise lassen sich auch algebraisch führen !!!

Ausblick und weitere Arbeit

- Anwendung auf Graphen möglich
- Beschreibung von Netzwerken mit Importen und unteren Schranken mit analogen Mitteln
- Vorantreiben der Axiomatisierung
- Versuch des automatischen/interaktiven Beweisens