Die vermutete Endlichkeit skelettfreier Sprachen

Roland Glück

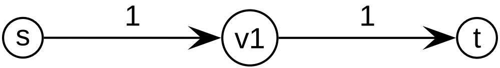
Universität Augsburg

16.07.2012
Sion

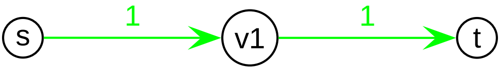
Übersicht

- Historische Motivation
- Sprachentheoretische Formulierung
- Beweis eines Spezialfalles
- Weitere Arbeit

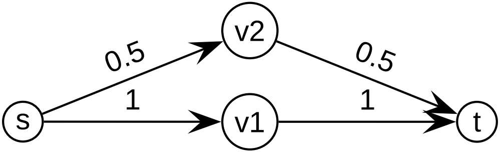
Suche nach dem kürzesten Weg



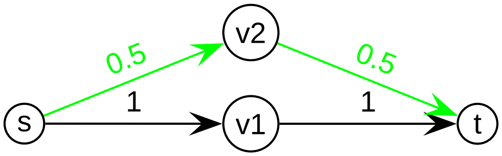
Suche nach dem kürzesten Weg



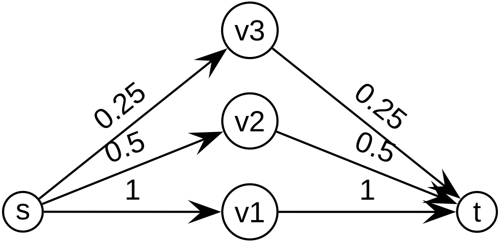
Suche nach dem kürzesten Weg



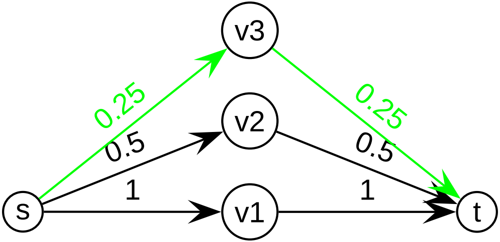
Suche nach dem kürzesten Weg



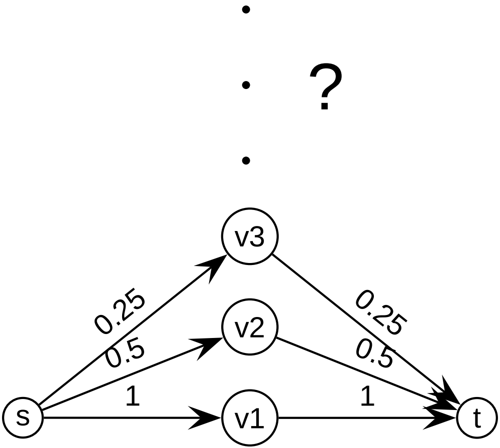
Suche nach dem kürzesten Weg



Suche nach dem kürzesten Weg



Suche nach dem kürzesten Weg



Existenz von kürzesten Wegen

- i.a. kein kürzester Weg in unendlichem Graph
- falls Menge der Kantengwichte endlich ist (und Kantengewiche aus $\mathbb{R}_{>0}$), existiert immer ein kürzester Weg
- analoge Beobachtung für Wege maximaler Kapazität
- abstraktere Fassung möglich?
- Verlängern macht Wert eines Weges nicht besser

Definition

Definition

Sei $v = v_1 v_2 \ldots v_n$ ein Wort. Ein Wort $u = u_1 u_2 \ldots u_m$ ist ein *Skelett* von v, falls es eine streng monoton steigende Funktion $f : \{1 \ldots m\} \rightarrow \{1 \ldots n\}$ gibt mit $u_i = v_{f(i)}$.

- Schreibweise: $skel(u, v)$
- Vereinbarung: $\forall v : skel(\varepsilon, v)$

Beobachtungen

- $skel(abc, aabbcc)$
- $skel(a^m, a^n) \Leftrightarrow m \leq n$
- $skel$ ist linear auf $\{a\}^*$
- $skel(xba^m, yba^n) \Leftarrow skel(x, y) \wedge m \leq n$

Weitere Definitionen

- $span(u) = \{v \in \Sigma^* \mid skel(u, v)\}$ (Σ aus Kontext klar)
- $span(L) = \bigcup_{u \in L} span(u)$
- $skel$ ist Noethersche Ordnung auf Σ^*
- jede Sprache L hat Menge von minimalen Elementen $min_{skel}(L)$ bzgl. $skel$
- $L_G \subseteq L$ ist *Generator* von L falls $L \subseteq span(L_G)$
- $min_{skel}(L)$ ist kleinster Generator von L (bzgl. $\subseteq$)

Skelettfreiheit

Definition

Eine Sprache L heißt *skelettfrei*, wenn für kein Paar $u, v \in L$ mit $u \neq v$ die Beziehung $skel(u, v)$ gilt.

- per definitionem ist $min_{skel}(L)$ immer skelettfrei
- L ist skelettfrei $\Leftrightarrow$ $min_{skel}(L) = L$
- skelettfreies L hat genau einen Generator, nämlich $L = min_{skel}(L)$

Schreibweisen

Definition

Sei $u \in \Sigma^*$ mit $|u|_a > 0$. Dann sind $u_{\rightarrow a}$ („u bis a“) und $u_{a\rightarrow}$ („u ab a“) gegeben durch die eindeutige Zerlegung $u = u_{\rightarrow a} a u_{a\rightarrow}$ mit $|u_{a\rightarrow}|_a = 0$.

- $aabbcc_{\rightarrow b} = aab$, $aabbcc_{b\rightarrow} = cc$, $aabbcc_{\rightarrow c} = aabbc$, $aabbcc_{c\rightarrow} = \varepsilon$
- geliftet auf Sprachen durch $L_{\rightarrow a} = \{u_{\rightarrow a} \mid u \in L \wedge |u|_a > 0\}$
- analog für $L_{a\rightarrow}$

Vermutungen

- Vermutung 1: Jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ mit $|\Sigma| < \infty$ hat einen endlichen Generator.
- Vermutung 2: Jede skelettfreie Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ mit $|\Sigma| < \infty$ ist endlich.
- gilt nicht für unendliches Σ
- Vermutung 1 und Vermutung 2 sind äquivalent

Hinrichtung

- Vermutung 1 $\Rightarrow$ Vermutung 2:
  - Sei L skelettfrei.
  - Dann gilt $min_{skel}(L) = L$.
  - Nach Annahme hat L einen endlichen Generator L_G.
  - Wegen $min_{skel}(L) \subseteq L_G$ ist $min_{skel}(L)$ endlich.
  - Also ist auch L endlich.

Rückrichtung

- Vermutung 2 $\Rightarrow$ Vermutung 1:
  - Sei L beliebig.
  - $min_{skel}(L)$ ist ein Generator von L.
  - min_{skel} ist skelettfrei.
  - Nach Annahme ist min_{skel} endlich.
  - Also hat L einen endlichen Generator.

Sicheres Wissen

Theorem

Sei Σ ein binäres Alphabet ($|\Sigma| = 2$). Dann gelten Vermutung 1 bzw. Vermutung 2.

Induktionsanfang

- o.B.d.A. sei $\Sigma = \{a, b\}$
- Induktion über Länge eines kürzesten Wortes u in L
- $|u| = 0$ ist klar
- $|u| = 1$: o.B.d.A. sei $u = a$
- alle Wörter in L haben die Form b^n mit $n \in \mathbb{N}^+$
- offensichtlich ist L endlich, falls L skelettfrei ist

Induktionsschritt, Teil 1

- o.B.d.A. sei $u = vb$ ein kürzestes Wort in L
- nur endlich viele $wba^n \in L$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weil:
- sei $L^n = \{wba^n \in L\}$, L^n skelettfrei
- nach IA hat $L^n_{\to b} \cup \{v\}$ endlichen Generator G^n
- $G^n ba^n \setminus \{vba^n\} \cup \{v\}$ ist endlicher Generator von L^n:
  - $wba^n \in L \Rightarrow \exists x \in G^n$ mit $skel(x, w)$
  - $x = v : skel(v, wba^n)$ mit $x = v \in L$
  - sonst $skel(xba^n, wba^n)$ mit $xba^n \in L$

Induktionsschritt, Teil 2

- Andererseits: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^+ \,\forall\, n > n_0 : wba^n \notin L$, da
- sei G^b endlicher Generator von $L_{\rightarrow b}$ (beachte $v \in L_{\rightarrow b}$!)
- für jedes $w \in G^b$ wähle ein $wba^{n_w} \in L$, vereinige alle in L^G
- sei $n_{max} = max\{n \mid a^n \in L^G_{b\rightarrow}\}$
- sei $wba^n \in L$ mit $n > n_{max}$
- dann $\exists\, xba^{n'} \in L^G$ mit $skel(x, w)$ und $n' < n$
- also $\exists\, xba^{n'} \in L$ (da $L^G \subseteq L$) mit $skel(xba^{n'}, wba^n) \Rightarrow \lightning$

Induktionsschritt, letzter Teil

- pro $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Wörter der Form $wba^n \in L$
- nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $wba^n \in L$
- insgesamt nur endlich viele Wörter in L

Ausbaumöglichkeiten

- Beweis auf beliebige endliche Σ erweiterbar?
- wichtiger Punkt: *skel* ist linear auf $\{a\}^*$
- erster Teil des Induktionsschrittes übertragbar, zweiter nicht

mehr Lücken als Wissen

- für $\Sigma = \{a, b, c\}$ und skelettfreies $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:
  - nur endlich viele Wörter aus $\{a, b\}^* \cup \{a, c\}^* \cup \{b, c\}^*$
  - kürzestes Wort hat mindestens Länge 2 (klingt verdächtig nach bereits bekannter Beweisidee)
- sonst große Unwissenheit
- Induktion über $|\Sigma|$?!